CONCOURS COMMUN I.N.A. E.N.S.A. 1979

MATIÈRES A OPTION

MATHÉMATIQUES

(3 heures)

Notations

$\mathbb{Z}^-$ désigne l'ensemble des entiers négatifs $\{0, -1, -2, \dots\}$.

I est l'intervalle réel $[0, \infty[$ tandis que $I^* = I \setminus \{0\}$.

E_0 (respectivement E_1) désigne l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle x continues et définies sur I (respectivement continues sur I et continûment dérivable sur I^*).

On appellera D l'anneau des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Préliminaires

Chercher et déterminer suivant les valeurs du paramètre réel α les solutions définies sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ de l'équation différentielle $xy' + \alpha y = 0$.

Cette équation possède-t-elle des solutions continues sur $\mathbb{R}$?

I

A. On définit pour $\alpha \in \mathbb{R}$ une application T_α de D dans D par : si $f \in D$, $T_\alpha(f)(x) = x f'(x) + \alpha f(x)$.

a. Montrer que T_α est une application linéaire de D dans D. Montrer que T_α est injective si $\alpha \notin \mathbb{Z}^-$.

Déterminer $\operatorname{Ker} T_\alpha$ quand $\alpha \in \mathbb{Z}^-$.

b. Soient f et $g \in D$. Démontrer que $T_\alpha(f) = g$ si et seulement si $T_{\alpha+1}(f') = g'$ et $\alpha f(0) = g(0)$.

En déduire que si $\alpha \neq 0$, T_α surjective $\Leftrightarrow$ $T_{\alpha+1}$ surjective.

B. *a.* Soient β et γ deux nombres réels positifs et soit $f \in D$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^1 t^\gamma f(t^\beta x)\, dt$.

Démontrer que si $h \neq 0$ on a l'inégalité pour tout x réel,

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \int_0^1 t^{\beta+\gamma} f'(t^\beta x)\, dt \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \sup_{|\xi| \leqslant |x| + |h|} |f''(\xi)|.$$

On pourra appliquer la formule de Taylor au point $t^\beta x$ à l'expression $f(t^\beta (x+h))$.

b. On pose, pour x réel, $U_\beta(f)(x) = \beta \int_0^1 f(t^\beta x)\, dt$.

Montrer que l'on définit ainsi une application U_β linéaire de D dans D.

c. Démontrer que si $\beta \geqslant 1$ on a

$$\forall f \in D \quad T_{1/\beta} \circ U_\beta(f) = f.$$

d. En déduire, à l'aide des résultats de la question A, que si $\alpha \notin \mathbb{Z}^-$, T_α est bijective et que si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, $\alpha = -n$, $\operatorname{Im}(T_\alpha) = \{f \in D; f^{(n)}(0) = 0\}$.

II

A. *a.* Étant donné $f \in E_0$, montrer qu'il existe une unique fonction g, élément de E_0, dérivable sur I^* telle que $\forall x \in I^*$, $x g'(x) + \frac{3}{2} g(x) = f(x)$. On définit ainsi une application L de E_0 dans E_0 par $L(f) = g$.

b. L est-elle linéaire? Est-elle injective?

c. Existe-t-il dans E_0 des fonctions f telles que $L(f) = f$?

d. Discuter suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'existence de fonctions f dans E_0 telles que $L(f) = \lambda f$.

B. *a.* Montrer que $E' = \operatorname{Im} L$ est inclus dans E_1.

b. Caractériser les éléments de E'.

c. On définit h_1 et h_2 par $h_1(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et $h_2(x) = x \operatorname{Log} x$ si $x \in I^*$ et $h_1(0) = h_2(0) = 0$. Les fonctions h_1 et h_2 sont-elles dans E_1 ? dans E' ?

C. *a.* Si la fonction f, élément de E_0, est dérivable à l'origine, montrer qu'il en est de même de $g = L(f)$ et qu'alors g' est continue sur I.

b. Donner un exemple de fonction $f \in E_0$ non dérivable à l'origine et telle que $g = L(f)$ soit dérivable à l'origine.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail